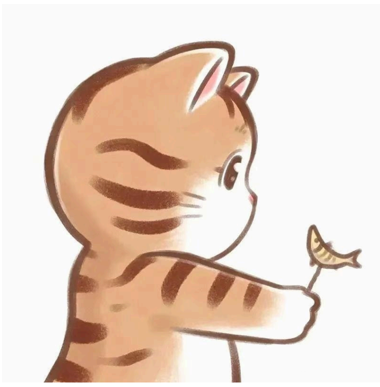
大二下学习笔记

QiyuZhang-stu 编著



https://qiyuzhang-stu.github.io/

2025 年 11 月

目录

线性代数 A（II）—— $4'$

一・多项式 &Lambda 矩阵

1.1 多项式 & 数论

定理 1.1.1（带余除法定理）设$f(x),g(x)\in K[x]$，且$g(x)\neq 0$，则存在唯一的一对多项式$h(x),r(x)\in K[x]$，使得$f(x)=g(x)h(x)+r(x)$，且$r(x)=0$或$\deg r(x)<\deg g(x)$。

定义 1.1.1（最大公因式）设$f(x),g(x)\in K[x]$，且不全为零，则存在唯一的首一多项式$d(x)\in K[x]$，使得$d(x)$是$f(x)$和$g(x)$的公因式，并且任何$f(x)$和$g(x)$的公因式都整除$d(x)$。

定义 1.1.2（最小公倍式）设$f(x),g(x)\in K[x]$，且不全为零，则存在唯一的首一多项式$l(x)\in K[x]$，使得$f(x)$和$g(x)$都是$l(x)$的因式，并且任何包含$f(x)$和$g(x)$的因式的多项式都整除$l(x)$。

定理 1.1.2（裴蜀定理）设$f(x),g(x)\in K[x]$，则存在多项式$h(x),k(x)\in K[x]$，使得

$$h(x)f(x)+k(x)g(x)=\gcd(f(x),g(x))$$

证：不妨设$\deg f(x)\geq \deg g(x)$，

$$\begin{aligned}
f(x)&=u_1(x)g(x)+r_1(x)\\
g(x)&=u_2(x)r_1(x)+r_2(x)\\
r_1(x)&=u_3(x)r_2(x)+r_3(x)\\
&\cdots\\
r_{k-2}(x)&=u_k(x)r_{k-1}(x)+r_k(x)\\
r_{k-1}(x)&=u_{k+1}(x)r_k(x)+0
\end{aligned}$$

此时$r_k(x)=\gcd(f(x),g(x))$，且$r_k(x)$可表示为$f(x),g(x)$的线性组合（可往上回溯证明）。

得证。

定理 1.1.3（多个多项式的最大公因式 & 最小公倍式）设$f_1(x),f_2(x),...,f_{n(x)}\in K[x]$，则存在唯一的首一多项式$d(x)\in K[x]$，使得$d(x)$是$f_1(x),f_2(x),...,f_{n(x)}$的公因式，并且任何$f_1(x),f_2(x),...,f_{n(x)}$的公因式都整除$d(x)$。同时存在唯一的首一多项式$l(x)\in K[x]$，使得$f_1(x),f_2(x),...,f_{n(x)}$都是$l(x)$的因式，并且任何包含$f_1(x),f_2(x),...,f_{n(x)}$的因式的多项式都整除$l(x)$。且gcd和lcm满足交换律和结合律。

定理 1.1.4（最大公因式与最小公倍式的关系）设$f(x),g(x)\in K[x]$，则有

$$\gcd(f(x),g(x))\cdot \mathrm{lcm}(f(x),g(x))=f(x)\cdot g(x)$$

证：若$f(x)g(x)=0$，此时结论显然成立。

不妨设$d(x)=\gcd(f(x),g(x))$，则存在多项式$f_1(x),g_1(x)\in K[x]$，使得

$$f(x)=d(x)f_1(x),g(x)=d(x)g_1(x),\gcd(f_1(x),g_1(x))=1$$

令$m(x)=d(x)f_1(x)g_1(x)$，则$f(x)\mid m(x),g(x)\mid m(x)$，设$f(x)\mid u(x),g(x)\mid u(x)$，则存在多项式$s(x),t(x)\in K[x]$，使得

$$u(x)=f(x)s(x)=g(x)t(x)$$

，从而

$$d(x)f_1(x)s(x)=d(x)g_1(x)t(x)$$

，即

$$f_1(x)s(x)=g_1(x)t(x)$$

，由

$$\gcd(f_1(x),g_1(x))=1$$

可知$g_1(x)\mid s(x)$，设$s(x)=g_1(x)v(x)$，则$u(x)=f(x)s(x)=d(x)f_1(x)g_1(x)v(x)=m(x)v(x)$，从而$m(x)\mid u(x)$。

得证。

【作业 1】m,p,q适合什么条件时，有
- (1)$x^2+mx-1\mid x^3+px+q$
- (2)$x^2+mx+1\mid x^4+px^2+q$

解：
- (1)利用次数关系可设$x^3+px+q=(x^2+mx-1)(ax+b)$，对比三次、零次项系数发现只能$x^3+px+q=(x^2+mx-1)(x-q)$，于是二次项、一次项系数即为方程

$$\begin{cases}q=m\\p=-mq-1\end{cases}$$

都用m表示也即$(m,p,q)=(m,-m^2-1,m)$。

- (2)利用次数关系可设$x^4+px^2+q=(x^2+mx+1)(ax^2+bx+c)$，对比四次、零次项系数发现只能$x^4+px^2+q=(x^2+mx+1)(x^2+bx+q)$，再考虑三次项发现$b=-m$，从而$x^4+px^2+q=(x^2+mx+1)(x^2-mx+q)$，二次项、一次项系数即为方程

$$\begin{cases}p=q+1-m^2\\0=mq-m\end{cases}$$

讨论m是否为 0 可知(m,p,q)为$(0,q+1,q)$或$(m,2-m^2,1)$。

【作业 2】若$x^3+(1+t)x^2+2x+2u$与x^3+tx+u最大公因式为二次，求t,u。

解：左减右得到$(1+t)x^2+(2-t)x+u$，由最大公因式性质可知此与x^3+tx+u的最大公因式仍为原最大公因式。若$t=-1$，这一定是一次多项式，从而最大公因式不可能为二次。因此，利用辗转相除法性质可知必然有

$$(1+t)x^2+(2-t)x+u \mid x^3+tx+u$$

先假设u非零，类似上方对比三次、零次项系数可得

$$((1+t)x^2+(2-t)x+u)\left(\frac{1}{1+t}x+1\right)=x^3+tx+u$$

由二次项、一次项系数得到方程

$$\begin{cases}\frac{2-t}{1+t}+1+t=0\\ \frac{u}{1+t}+2-t=0\end{cases}$$

直接解出(t,u)为$\left(\frac{-1+\sqrt{11}i}{2},-7-\sqrt{11}i\right)$或$\left(\frac{-1-\sqrt{11}i}{2},-7+\sqrt{11}i\right)$。

当 u 为零时，也即

$$(1+t)x^2+(2-t)x \mid x^3+tx$$

同除以 x 不影响整除性得到

$$(1+t)x+(2-t)|x^2+t$$

验证$2-t=0$时不满足条件，从而类似有

$$((1+t)x+(2-t))\left(\frac{x}{1+t}+\frac{t}{2-t}\right)=x^2+t$$

对比一次项系数得到方程

$$\frac{2-t}{1+t}+\frac{t(1+t)}{2-t}=0$$

这是三次方程，不过可尝试得到$t=-4$为根，从而分解为$(t+4)(t^2-t+1)$，最终解出 t 为-4或$\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

综合以上，(t,u)共有 5 个解：

$$\left(\frac{-1+\sqrt{11}i}{2},-7-\sqrt{11}i\right),$$

$$\left(\frac{-1-\sqrt{11}i}{2},-7+\sqrt{11}i\right),$$

$$(-4,0),$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2},0\right),$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2},0\right)$$

【作业3】若$f(x)$、$g(x)$不全为0，$u(x)f(x)+v(x)g(x)=\gcd(f(x),g(x))$，证$\gcd(u(x),v(x))=1$。

解：记$d(x)=\gcd(f(x),g(x))$，由条件其非零，从而由整除性$f_1(x)=\frac{f(x)}{d(x)}$与$g_1(x)=\frac{g(x)}{d(x)}$都为多项式。等式两侧同除以$d(x)$得到

$$f_1(x)u(x)+g_1(x)v(x)=1$$

若$m(x)$同时为$u(x)$、$v(x)$的因式，则其也为 1 的因式，从而只能为非零常数，因此

$$\gcd(u(x),v(x))=1$$

1.2 Lambda 矩阵

定义 1.2.1（Lambda 矩阵的秩） 设$A(\lambda)$为 Lambda 矩阵，若存在正整数r，使得$d_r(A)\neq 0$且$d_{r+1}(A)=0$，则称r为A的秩，记为$rank(A)$。若对任意正整数r，都有$d_r(A)=0$，则称A的秩为 0，记为$rank(A)=0$。（$d_r(A)$表示A的r阶子式，一个矩阵的k阶子式是指其任意选取k个行和k个列的元素构成的行列式）

定义 1.2.2（Lambda 矩阵的可逆性） 设$A(\lambda)\in M_{n(K)}$为 Lambda 矩阵，若存在$B(\lambda)\in M_{n(K)}$使得$A(\lambda)B(\lambda)=B(\lambda)A(\lambda)=I_n$，则称$A$是可逆的，且称$B$为$A$的逆矩阵。

定理 1.2.1（Lambda 矩阵的可逆的充要条件） 设$A(\lambda)\in M_{n(K)}$为 Lambda 矩阵，则$A(\lambda)$可逆当且仅当其行列式$\det A(\lambda)$为非零常数。

解：必要性：若$A(\lambda)$可逆，则存在$B(\lambda)\in M_{n(K)}$使得$A(\lambda)B(\lambda)=I_n$，从而$\det(A(\lambda)B(\lambda))=\det I_n=1$，又有$\det(A(\lambda)B(\lambda))=\det A(\lambda)\cdot\det B(\lambda)$，因此$\det A(\lambda)$为非零常数。

充分性：若$\det A(\lambda)$为非零常数，则$\det A(\lambda)\cdot\det B(\lambda)=1$，从而$\det B(\lambda)=\frac{1}{\det A(\lambda)}$，因此存在$B(\lambda)\in M_{n(K)}$使得$A(\lambda)B(\lambda)=I_n$，即$A(\lambda)$可逆。

得证。

定义 1.2.3（Lambda 矩阵的初等变换） 设$A(\lambda)$为 Lambda 矩阵，则对$A(\lambda)$施行下列变换之一，称为对$A(\lambda)$施行了一次初等变换：

- (1)交换$A(\lambda)$的两行（列）；
- (2)将$A(\lambda)$的某一行（列）乘以非零常数$c\in K$；
- (3)将$A(\lambda)$的某一行（列）加上另一行（列）的$\varphi(\lambda)$倍。

定义 1.2.4（Lambda 矩阵的等价） 设$A(\lambda),B(\lambda)\in M_{n(K)}$为 Lambda 矩阵，若存在可逆的 Lambda 矩阵$P(\lambda),Q(\lambda)\in M_{n(K)}$使得$P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda)=B(\lambda)$，则称$A(\lambda)$与$B(\lambda)$等价。

定理 1.2.2（Lambda 矩阵经过初等变换可化为标准形） 任意一个非 0 的$s\times n$的 Lambda 矩阵$A(\lambda)$，都等价于

$$
\begin{pmatrix}
d_1(\lambda) & & & & & & \\
& d_2(\lambda) & & & & & \\
& & \ddots & & & & \\
& & & d_{r(\lambda)} & & & \\
& & & & 0 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 0
\end{pmatrix}
$$

，$d_i(\lambda)$为首一多项式，满足$d_1(\lambda)\mid d_2(\lambda)\mid ...\mid d_r(\lambda)$。

证:

引理1.2.1:设$A(\lambda)$左上角元素$a_{11}(\lambda)\neq 0$,并且$a_{11}(\lambda)$不能整除所有元素,则可找到$B(\lambda)$与$A(\lambda)$等价，且$B(\lambda)$左上角元素$b_{11}(\lambda)\neq 0$且次数小于$a_{11}(\lambda)$的次数。

1.若$A(\lambda)$第一列有一个元素$a_{i1}(\lambda)$不能被$a_{11}(\lambda)$整除，则有

$$a_{i1}(\lambda)=a_{11}(\lambda)q(\lambda)+r(\lambda)$$

，其中$r(\lambda)$不为零且次数小于$a_{11}(\lambda)$的次数。对$A(\lambda)$施行初等变换：用第i行减去第 1 行的$q(\lambda)$倍，再交换第 1 行和第i行，得到矩阵$B(\lambda)$即为所求。

2.与 1 同理。

3.若$A(\lambda)$第一行和第一列的元素均能被$a_{11}(\lambda)$整除，但$a_{11}(\lambda)$不能整除所有元素，则必然存在某个元素$a_{ij}(\lambda)$不能被$a_{11}(\lambda)$整除。设$a_{i1}(\lambda)=a_{11}(\lambda)\varphi(\lambda)$，则

$$
\begin{aligned}
A(\lambda)&=\begin{pmatrix}
a_{11}(\lambda) & ... & a_{1j}(\lambda) & ...\\
\vdots & & \vdots & \vdots\\
a_{i1}(\lambda) & ... & a_{ij}(\lambda) & ...\\
\vdots & & \vdots & \vdots
\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}
a_{11}(\lambda) & ... & a_{1j}(\lambda) & ...\\
\vdots & & \vdots & \vdots\\
0 & ... & a_{ij}(\lambda)-\varphi(\lambda)a_{1j}(\lambda) & ...\\
\vdots & & \vdots & \vdots
\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}
a_{11}(\lambda) & ... & a_{ij}(\lambda)-(1-\varphi(\lambda))a_{1j}(\lambda) & ...\\
\vdots & & \vdots & \vdots\\
0 & ... & a_{ij}(\lambda)-\varphi(\lambda)a_{1j}(\lambda) & ...\\
\vdots & & \vdots & \vdots
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

这样，就转化为了第 2 种情况。

引理得证。

经过行列交换，可使得$\boldsymbol{A(\lambda)}$左上角元素不为零。若其能整除所有元素，则将其作为$d_1(\lambda)$，把第一行和第一列的其它元素清 0，并对剩余子矩阵重复上述过程。否则，利用引理 1.2.1，不断施行初等变换，直到左上角元素能整除所有元素为止（定能在有限次完成，因为$\boldsymbol{a_{11}(\lambda)}$次数

递减)，然后再将其作为$d_1(\lambda)$，并对剩余子矩阵重复上述过程。如此反复进行有限次，直到所有元素均为 0 为止，即可得到所需的标准形。

定义 1.2.5（行列式因子）设$A(\lambda) \in M_{n(K)}$为 Lambda 矩阵，其k阶子式全体的公因式中次数最高的首一多项式称为$A(\lambda)$的k阶行列式因子，记为$d_k(\lambda)$。

定理 1.2.3（初等变换下的不变量）等价的 Lambda 矩阵具有相同的秩和行列式因子

证: 只需证明，对$A(\lambda)$施行一次初等变换后变为$B(\lambda)$，其秩和行列式因子不变。设$A(\lambda)$与$B(\lambda)$的k阶行列式因子分别为$f(\lambda)$与$g(\lambda)$，我们证明$f = g$。

1.$A(\lambda)$经过交换行变为$B(\lambda)$时，任意k阶子式的值仅改变符号，因此$f(\lambda) = g(\lambda)$。

2.$A(\lambda)$经过某行乘以非零常数$c \in K$变为$B(\lambda)$时，任意k阶子式的值要么不变，要么也乘以c，因此$f(\lambda)$与$g(\lambda)$只差一个常数因子，从而$f(\lambda) = g(\lambda)$。

3.$A(\lambda)$经过i行加上j行的$\varphi(\lambda)$倍变为$B(\lambda)$时，那些包含i行和j行以及不包含i行的k阶子式的值均不变，只有那些包含i行但不包含j行的k阶子式的值会改变，但其按i行展开时，i行的元素均被替换为原i行元素加上j行元素的$\varphi(\lambda)$倍，因此该子式的值变为原子式值加上另一个子式值的$\varphi(\lambda)$倍，也就是该子式的值仍然是$A(\lambda)$的k阶子式的线性组合（类似于辗转相除法)，因此$f(\lambda) = g(\lambda)$。

列变换同理。

得证。

定理 1.2.4（标准形的唯一性）Lambda 矩阵标准形唯一。

证：设$A(\lambda)$标准形

$$\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

其k阶行列式因子$D_k(\lambda) = d_1(\lambda)d_2(\lambda)...d_k(\lambda)$。于是$d_r(\lambda) = \frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)}$。依此类推，可唯一确定所有$d_i(\lambda)$。

定义 1.2.6（不变因子）设$A(\lambda) \in M_{n(K)}$为 Lambda 矩阵，其标准形为

$$\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

，其中$d_i(\lambda)$为首一多项式，满足$d_1(\lambda) \mid d_2(\lambda) \mid ... \mid d_r(\lambda)$。称$d_i(\lambda)$为$A(\lambda)$的第$i$个不变因子。

定理 1.2.5（Lambda 矩阵等价的充分条件） 两个 Lambda 矩阵等价当且仅当它们具有相同的不变因子/行列式因子。

证明显然。

推论 1.2.1（可逆矩阵的标准形） 可逆的 Lambda 矩阵标准形为单位矩阵。

证：设$|A(\lambda)| = d$，则$D_n(\lambda) = 1$，又$D_k(\lambda) \mid D_n(\lambda)$，故$D_k(\lambda) = 1$，从而所有不变因子均为 1，标准形即为单位矩阵。

那么反过来，与I_n等价的矩阵一定是可逆矩阵，因为其行列式为非零常数。也就是说，

推论 1.2.2（Lambda 矩阵可逆的充要条件） Lambda 矩阵可逆当且仅当其标准形为单位矩阵。

又 $A(\lambda)$与 $B(\lambda)$等价充要条件是有初等矩阵 $P_1, ...P_l$与 $Q_1, ...Q_k$使得 $B(\lambda) = P_1...P_l A(\lambda) Q_1...Q_k$。特别的，当$A(\lambda) = I_n$时，就得到

定理 1.2.6（Lambda 矩阵可逆的充要条件） Lambda 矩阵可逆当且仅当其可以表示为一些初等矩阵的乘积。

推论 1.2.3（Lambda 矩阵可逆的充要条件） 两个$s \times n$矩阵$A(\lambda)$与$B(\lambda)$等价当且仅当存在可逆的$s \times s$矩阵$P(\lambda)$和可逆的$n \times n$矩阵$Q(\lambda)$使得$B(\lambda) = P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda)$。

1.3 Lambda 矩阵与数阵的联系

定理 1.3.1（大定理） 设A, B是数域P上的n阶数阵，则$A \sim B$充要条件是它们的特征矩阵$\lambda I - A$与$\lambda I - B$等价。

证：

引理 1.3.1 若有n阶数阵P, Q，使得$\lambda I - A = P(\lambda I - B)Q$，则$A, B$相似。

证：由等式可得

$$\lambda I - A = \lambda PQ - PBQ$$

，由于等式对任意λ成立，则$I - PQ = 0$，从而$PQ = I$，即$Q = P^{-1}$，因此$A = PBP^{-1}$，即A, B相似。

引理 1.3.2 对任意不为 0 的n阶数阵A和$U(\lambda), V(\lambda)$，定存在数阵U_0, V_0和$Q(\lambda), R(\lambda)$使得

$$U(\lambda) = (\lambda I - A)Q(\lambda) + U_0$$
$$V(\lambda) = R(\lambda)(\lambda I - A) + V_0$$

证：把$U(\lambda)$改写为

$$U(\lambda) = D_0\lambda^m + D_1\lambda^{m-1} + ... + D_m$$

其中$D_0, D_1, ..., D_m$都是n阶数阵，且$D_0 \neq O$

1.若$m = 0$，令$U_0 = D_0, Q(\lambda) = 0$

$2.m>0$，令$Q(\lambda)=Q_0\lambda^{m-1}+Q_1\lambda^{m-2}+...+Q_{m-1}$，$Q_i$为数阵，那么

$(\lambda I-A)Q(\lambda)+U_0=Q_0\lambda^m+(Q_1-AQ_0)\lambda^{m-1}+...+(U_0-AQ_{m-1})$

只需

$$\begin{gathered}Q_0=D_0\\ Q_1=D_1+AQ_0\\ \cdots\cdots\\ U_0=D_m+AQ_{m-1}\end{gathered}$$

即可，同理可证$V(\lambda)$

证毕。

由推论 1.2.3，$\lambda I-A$与$\lambda I-B$等价就是存在可逆的 Lambda 矩阵$U(\lambda),V(\lambda)$使得

$$\lambda I-A=U(\lambda)(\lambda I-B)V(\lambda)$$

1.先证必要性：若A,B相似，则存在可逆的数阵P使得$A=PBP^{-1}$，从而

$$\lambda I-A=\lambda I-PBP^{-1}=P(\lambda I-B)P^{-1}$$

，因此$\lambda I-A$与$\lambda I-B$等价。

2.再证充分性：由等式

$$\lambda I-A=U(\lambda)(\lambda I-B)V(\lambda)$$

，利用引理 1.3.2，有数阵U_0,V_0使得

$$\begin{aligned}U(\lambda)&=(\lambda I-A)Q(\lambda)+U_0\\ V(\lambda)&=R(\lambda)(\lambda I-A)+V_0\end{aligned}$$

，将其代入上式，得到

$$\begin{aligned}U(\lambda)^{-1}(\lambda I-A)&=(\lambda I-B)V(\lambda)\\ &=(\lambda I-B)(R(\lambda)(\lambda I-A)+V_0)\end{aligned}$$

则

$$(U(\lambda)^{-1}-(\lambda I-B)R(\lambda))(\lambda I-A)=(\lambda I-B)V_0$$

则

$$\begin{gathered}U(\lambda)^{-1}-(\lambda I-B)R(\lambda)=T_0(T_0\text{为数阵})\\ T_0(\lambda I-A)=(\lambda I-B)V_0\end{gathered}$$

下面证明T_0可逆：

由上式

$$
\begin{aligned}
I &= U(\lambda)T_0 + U(\lambda)(\lambda I - B)R(\lambda) \\
&= U(\lambda)T_0 + (\lambda I - A)V(\lambda)^{-1}R(\lambda) \\
&= ((\lambda I - A)Q(\lambda) + U_0)T_0 + (\lambda I - A)V(\lambda)^{-1}R(\lambda) \\
&= (\lambda I - A)(Q(\lambda)T_0 + V(\lambda)^{-1}R(\lambda)) + U_0T_0
\end{aligned}
$$

同理，只能

$$
U_0T_0 = I
$$

$$
Q(\lambda)T_0 + V(\lambda)^{-1}R(\lambda) = 0
$$

故

$$
\lambda I - A = U_0(\lambda I - B)V_0
$$

由引理 1.3.1 知A, B相似。

证毕。

推论 **1.3.1**（数阵相似的充要条件）两个数阵A, B相似当且仅当它们有相同的不变因子。

1.4 复数域中的讨论

定义 **1.4.1**（初等因子） 把矩阵（线性变换）A的每个次数大于 0 的不变因子分解为互不相同的首一一次因式幂，称为A的初等因子。

那么，初等因子与不变因子的关系是怎样的呢？设A的第i个不变因子为

$$
d_i(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_{i1}}(\lambda - \lambda_2)^{m_{i2}}...(\lambda - \lambda_k)^{m_{ik}}
$$

，则A的初等因子为$k_{ij} \geq 1$的那些方幂，注意到$d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)$，则$m_{ij} \leq m_{i+1j}$，因此，同一个一次因式幂次最高的必定出现在$d_n(\lambda)$中，依此类推。

这也说明了，在矩阵阶数已知情况下，不变因子与初等因子是可以相互转换的。

定理 **1.4.1**（复矩阵相似的充分必要条件）设A, B为复数域C上的n阶数阵，则A, B相似当且仅当它们有相同的初等因子。

因此，在复数域上研究矩阵相似问题时，只需研究初等因子即可（当然不变因子通用，但并没有初等因子求法简易）。在此之前，引入多项式的一个简单引理

引理 **1.4.1**（一个不太显然的多项式结论）若$f_1(\lambda), f_2(\lambda)$都与$g_1(\lambda), g_2(\lambda)$互素，则

$$
\gcd(f_1(\lambda)g_1(\lambda), f_2(\lambda)g_2(\lambda)) = \gcd(f_1(\lambda), f_2(\lambda))\gcd(g_1(\lambda), g_2(\lambda))
$$

证：设

$$
d(\lambda) = \gcd(f_1(\lambda)g_1(\lambda), f_2(\lambda)g_2(\lambda))
$$

$$
d_1(\lambda) = \gcd(f_1(\lambda), f_2(\lambda))
$$

$$
d_2(\lambda) = \gcd(g_1(\lambda), g_2(\lambda))
$$

则存在互素的$h_1(\lambda), h_2(\lambda)$，以及互素的$k_1(\lambda), k_2(\lambda)$使得

$$f_1(\lambda) = d_1(\lambda)h_1(\lambda)$$
$$f_2(\lambda) = d_1(\lambda)h_2(\lambda)$$
$$g_1(\lambda) = d_2(\lambda)k_1(\lambda)$$
$$g_2(\lambda) = d_2(\lambda)k_2(\lambda)$$

从而

$$d = \gcd(d_1d_2h_1k_1, d_1d_2h_1k_2)$$

显然$d_1d_2 \mid d$

另一方面，$d \mid f_1g_1, d \mid f_2g_2$，且$(f_1, g_1) = 1, (f_2, g_2) = 1$，可设$d = fg$，且$f \mid f_1, f_2$，$g \mid g_1, g_2$，从而$f \mid d_1, g \mid d_2$，因此$d \mid d_1d_2$。

综上，$d = d_1d_2$

证毕。

引理 1.4.2（1.4.1 基础上的推论） 若f_1, f_2都与g_1, g_2互素，则

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} f_1g_1 & 0 \\ 0 & f_2g_2 \end{pmatrix}$$

$$B(\lambda) = \begin{pmatrix} f_1g_2 & 0 \\ 0 & f_2g_1 \end{pmatrix}$$

，则$A(\lambda)$与$B(\lambda)$等价。

证：$A(\lambda), B(\lambda)$二阶行列式因子显然相等，而一阶行列式因子分别为(f_1g_1, f_2g_2)和(f_1g_2, f_2g_1)，由引理 1.4.1 知它们有相同的最大公因式，因此$A(\lambda)$与$B(\lambda)$等价。

定理 1.4.2（初等因子求法） 首先用初等变换化特征矩阵$\lambda I - A$为对角阵，然后将主对角元分解为一次方幂式的乘积，这些方幂即为A的初等因子。

证：设第i个对角元$h_i(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_{i1}}(\lambda - \lambda_2)^{k_{i2}}...(\lambda - \lambda_t)^{k_{it}} = (\lambda - \lambda_1)^{k_{i1}}g_i(\lambda)$，显然$(\lambda - \lambda_1)^{k_{i1}}, g_i(\lambda)$互素，那么它与它上下两个对角元可以对调$(\lambda - \lambda_1)^{k_{i1}}$位置，从而得到标准形，而二者分解后的所有一次方幂即为初等因子显然是相同的。

证毕。

1.5 一些疑惑与解答

【Q1】 $T(\lambda)(\lambda I - A) = (\lambda I - B)V_0$能否得出$T(\lambda)$为数阵？可是存在$T(\lambda)U(\lambda) = I$且$\deg T$和$\deg U$都不为 0 啊？

解：设$\deg T(\lambda) = m$可写为

$$T(\lambda) = T_0\lambda^m + T_1\lambda^{m-1} + ... + T_m$$

其中$T_0,T_1,...,T_m$都是n阶数阵，且$T_0\neq O$，故

$$T(\lambda)(\lambda I-A)=T_0\lambda^{m+1}+(T_1-T_0A)\lambda^m+...+(-T_mA)$$

由于等式对任意λ成立，则$m=0$，从而$T(\lambda)=T_0$为数阵。

而设

$$V(\lambda)=V_0\lambda^n+V_1\lambda^{n-1}+...+V_n$$

，则

$$T(\lambda)V(\lambda)=T_0V_0\lambda^{n+m}+...$$

又$\deg T$和$\deg U$都不为`0`，则$\lambda^i(i\neq 0)$系数均为`0`，例如$T_0V_0=0$，也就解释了这些疑惑

算法设计与分析—— 3′

信息科学中的概率统计—— 3′

代数结构与组合数学—— 3′

计算机视觉导论—— 3′

习近平新时代中国特色社会主义思想概论—— 3′

简明量子力学—— 2′

计算摄像学—— 2′

英语名著与电影—— 2′

太极拳—— 1′

科研任务